ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 135.

Α2. α) Η πρόταση είναι ψευδής.

β) Αιτιολόγηση: Σελίδα 99 σχολικού βιβλίου (η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x=0$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό).

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 73.

Α4. **α)** Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A=(0, +\infty)$ $B=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$

$A_1= \{x\in B, g(x)\in A\}\neq\varnothing$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα η fog ορίζεται στο σύνολο $A_1=(0, 1)$ και έχει τύπο:

$(fog)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$

Β2. Έχουμε $h(x)=(fog)(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$.

Για κάθε x∈(0, 1) έχουμε $h'(x) = \left(ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)' = (lnx - \ln(1-x))' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0.$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1), οπότε η h είναι 1-1 και επομένως η συνάρτηση h αντιστρέφεται.

Έχουμε $\psi = ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}\ y \in R.$

Άρα $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}, x \in R.$

Β3. Για κάθε x∈R έχουμε $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ και $\varphi''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

Η μονοτονία της φ, η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
φ΄(x)	+	0	+
φ΄΄(x)	+		-
φ(x)		$\frac{1}{2}$	
		Σ.Κ.	

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν έχει ακρότατα.

Η φ είναι κυρτή στο (-∞, 0], κοίλη στο [0, +∞) και το σημείο Σ(0, $\frac{1}{2}$) είναι σημείο καμπής της C_φ.

Β4.

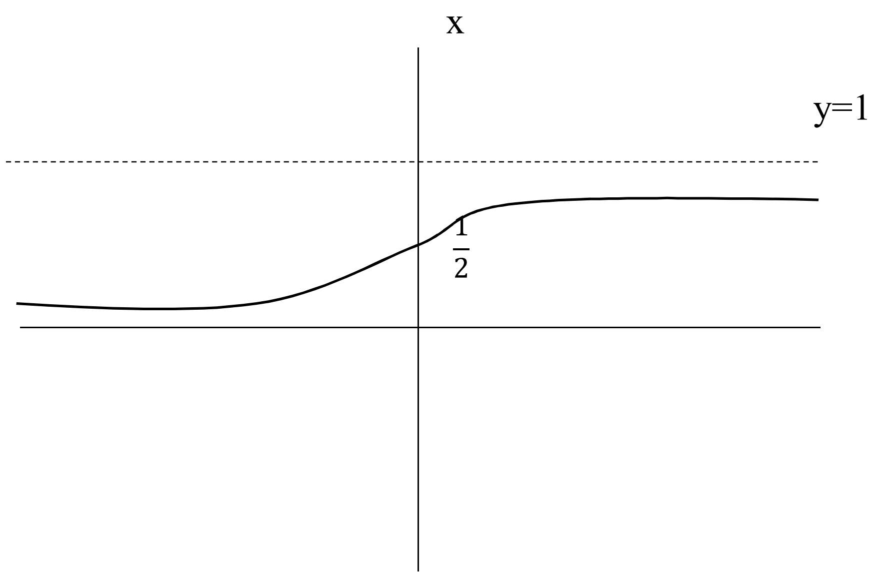
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$

Οπότε η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο -∞.

- $\lim\limits_{x\to+\propto}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\propto}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\propto}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\propto}{+\propto}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\propto}\frac{(e^x)\prime}{(e^x+1)\prime}=\lim\limits_{x\to+\propto}\frac{e^x}{e^x}=1.$

Οπότε η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο +∝.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με f΄(x)= -συνx.

Έστω σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f.

Η εφαπτομένη στο σημείο Μ είναι ε: $y-f(x_0)=f΄(x_0)\ (x-x_0)\Leftrightarrow$

$y+\eta\mu x_0=-\ \sigma\upsilon\nu x_0\ (x-x_0)$.

Η ε διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ αν και μόνο αν

$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu\ \ _0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu\ \ _0=-\frac{\pi}{2}\ \sigma\upsilon\nu x_0+x_0\sigma\upsilon\nu x_0\Leftrightarrow$

$\eta\mu\ \ _0+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{\pi}{2}=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu \quad - x\sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}, x \in [0, \pi]$$

Προφανείς ρίζες οι x=0, x=π αφού φ(0)=0 και φ(π)=0.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με $\varphi'(x)=\eta\mu x(x-\frac{\pi}{2})$

Το πρόσημο της φ΄ και η μονοτονία της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
φ΄(x)		-	0	+	
φ(x)	0	↘	2-π/2	↗	0

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$

Οπότε $\varphi(\Delta_1)=\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi(0)\right] = \left[2-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και αφού $0 \in \varphi(\Delta_1)$ η εξίσωση φ(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=0 στο διάστημα αυτό.

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, οπότε $\varphi(\Delta_2)=\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right), \varphi(\pi)\right] = \left[2-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και αφού $0 \in \varphi\ (\Delta_2)$ η εξίσωση φ(x)=0 έχει μοναδική ρίζα την x=π στο διάστημα αυτό.

Άρα Ο(0, 0) και Μ(π, 0) τα σημεία επαφής.

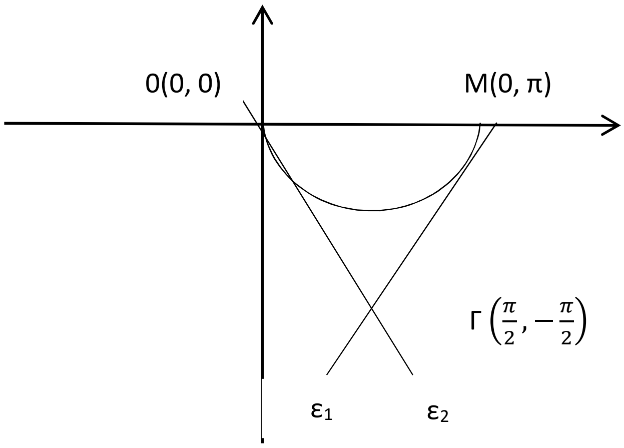
- Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο της 0(0, 0) έχει εξίσωση

ε_1: $y-f(0)=f'(0)\ (x-0) \Leftrightarrow y= -x$.

- Η εφαπτομένης ε_2 της C_f στο σημείο της Μ(π, 0) έχει εξίσωση

ε_2: $y-f(\pi)=f'(\pi)\ (x-\pi) \Leftrightarrow y=x-\pi$.

Γ2.



Οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο Γ $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

• $\mathrm{E}(\Omega_2) = -\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx$

$= [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = 2\tau.\mu.$

• $\mathrm{E}(\Omega_1) = (OM\Gamma) - E(\Omega_2) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} - 2 = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)\tau.\mu.$

Άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$

Γ3. Έχουμε

• $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x) + x) = \lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x + x) = -\eta\mu\,\pi + \pi = \pi > 0$

• $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x) - x + \pi) = \lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x - x + \pi) = 0$ και αφού f(x)>x-π για x κοντά στο π, τότε f(x)-x+π>0 για x κοντά στο π.

Οπότε $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{f(x)-x+\pi} = +\propto$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi}\left[f(x) + x)\cdot\frac{1}{f(x)-x+\pi}\right] = +\propto$

Γ4. Για κάθε x∈[0, π] ισχύει f(x)≥x-π με το ίσον να ισχύει μόνο για x=π.

Άρα $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$ για κάθε x∈[1, e].

Η συνάρτηση h(x)=$\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{\pi}{x}$ είναι συνεχής στο [1, e] και ισχύει h(x)>0 για κάθε x∈[1, e].

Άρα $\int_1^e h(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{\pi}{x}\right) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x - \pi lnx]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. - Στο διάστημα [-1, 0) η f έχει τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ και είναι συνεχής.

- Στο διάστημα (0, π] η f έχει τύπο f(x)=e^xημx και είναι συνεχής στο γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων e^x και ημx.

- Επειδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x \eta\mu x) = e^0 \eta\mu 0 = 0$

f(0)=0

Τότε
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο x_0=0.

Επομένως η f είναι συνεχής στο [-1, π].

- Για κάθε x∈(-1, 0) έχουμε $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$ και είναι f΄(x)<0 για κάθε x∈(-1, 0)

- Για κάθε x∈(0, π) έχουμε f΄(x)=(e^xημx)$^\nu$=e^x(ημx+συνx)

Είναι f΄(x)=0⇔e^x(ημx+συνx)=0$\overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow}$ημx+συνx=0⇔

⇔ημx= -συνx⇔εφx=-1⇔$x = \frac{3\pi}{4}$

• Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0}\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{\eta\mu x}{x}\right) = e^0\cdot 1 = 1$$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0.

Άρα τα σημεία 0 και $\frac{3\pi}{4}$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα [-1, π].

Δ2. Το πρόσημο της f΄ η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-1		0		3π/4		π
f΄(x)		-	‖	+	0	-	
f(x)	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.

Επειδή

• $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$, τότε f΄(x)>0 για κάθε x∈$\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$

• $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{\frac{3\pi}{6}}\left(\eta\mu\frac{5\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\right) =$

$e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$, τότε f΄(x)<0 για κάθε x∈$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα [-1, 0] και $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Στο x=0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(-1)=1.

Στο x=0 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(0)=0.

Στο $x = \frac{3\pi}{4}$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

Στο x=π η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το f(π)=0.

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [0, π].

Για κάθε x∈[0, π] έχουμε g(x)-f(x)=e^{5x}-e^xημx=e^x(e^{4x}-ημx)>0 αφού

- e^{4x}≥1 για κάθε x∈[0, π] με το ισον να ισχύει μόνο για x=0
- ημx≤1 για κάθε x∈[0, π] με το ισον να ισχύει μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$

Άρα e^{4x}>ημx για κάθε x∈[0, π].

Επομένως Ε(Ω)=$\int_0^\pi (g(x) - f(x)dx = \int_0^\pi g(x)dx - \int_0^\pi f(x)dx.$

Έχουμε $\int_0^\pi g(x)dx = \int_0^\pi e^{5x}dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi}-1}{5}$

- $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx =$

$$\int_0^\pi (e^x)'\eta\mu x dx = [e^x \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\eta\mu x)'dx$$

$= -\int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^\pi (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx$

$$-[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx$$

$= e^\pi + 1 - \int_0^\pi f(x)dx$

Άρα $\int_0^\pi f(x)dx = \frac{e^\pi+1}{2}$

Επομένως $E(\Omega) = \left(\frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^\pi+1}{2}\right)\tau.\mu.$

Δ4. Με x∈[-1, π] έχουμε

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

16f(x)-(4x-3π)^2=8$\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}}$ ⇔

$f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$f(x)-\left(f\,\frac{3\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)= $f(x)-\left(f\,\frac{3\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$, x∈[-1, π].

• $h\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$

• Αφού στο $x=\frac{3\pi}{4}$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο τότε για κάθε x∈[-1, π] ισχύει $f(x) \leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Άρα για κάθε x∈$\left[-1,\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ισχύουν $f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<0$ και

$-(x-\frac{3\pi}{4})^2<0$, οπότε h(x)<0.

Επομένως η $x=\frac{3\pi}{4}$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης h(x)=0 και άρα της εξίσωσης (1).

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΚΑΙ ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.

www.floropoulos.gr